



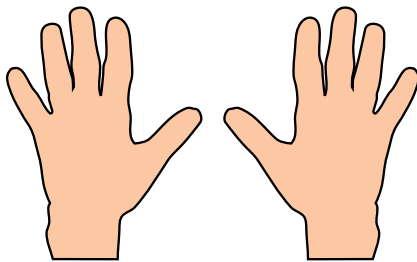
## 左與右 (二)

歐氏幾何為什麼左右不分？因為我們是處在三維的空間裡。

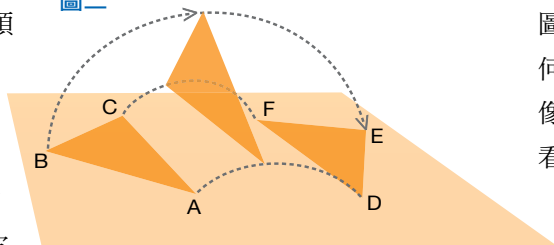
手有左手、右手之分：左手的鏡像為右手，兩者相似而不同；其他不具鏡像對稱的物體也有所謂左右之分，譬如說，螺絲有左旋與右旋之分，光子也有左旋與右旋之分等。這樣的性質在物理學中稱為「手徵」，在化學中則習稱為「掌性」或「手性」。關於手徵，有個問題，科學家不太當它一回事，但哲學家卻頗為在意，那就是它到底是內在或外在的性質？所謂內在性質指的是一個物體本身所具有、和其他東西無涉的特性，例如所帶的電荷或質量；而物體的外在性質就是取決於它和其他物體的相對關係的性質，例如大小。

大哲學家康德是最早認真看待這個問題的人，他在1768年發表一篇論文〈論空間中不同區域之差別的最終基礎〉，裡頭說：「從左右兩手這日常例子明顯可知，一個物體可以和另一個物體，有完全類似的形狀，在大小上也完全一樣，可是兩者仍存在著內在差異，其差異在於能夠包圍住一者的表面不可能包圍住另一者……讓我們想像宇宙中最早被創造出來的東西是一隻人類的手，那麼這隻手必然是一隻左手或右手。」所以康德從右手無法套進左手套這件事認定有物體可有左右之分，也相信單獨一隻手仍有其特定的手徵可言，即手徵是內在性

圖一



圖二



質，不是必然需要有左右兩手相互對照才會顯現出來的性質。我猜大多數人會認同康德的觀點。

然而左右之分其實沒有一般人所想的那麼理所當然。我以平面上的左右之分為例，來說明其微妙。圖一中兩個幾何形狀很明顯是不同的：一個是左手的模樣，另一個是右手的模樣，兩者互為鏡像。我們如硬要說兩者是全等的，是沒有區別的，則左右之分就不存在了。當然沒有人會把這麼明顯不同的東西看成一樣，是吧？可是大家如果還記得國中所學的平面（歐氏）幾何、還記得其中所謂的SSS定理，就應可理解依據歐氏幾何的精神，我們正得這麼做！

SSS定理是說「若兩個三角形的三

邊對應相等，則此兩三角形是全等三角形」。以圖二所示的三角形為例，左邊的 $\triangle ABC$ 全等於右邊的 $\triangle DEF$ ，因為對應的邊長相等。但是不管我們怎麼轉動或移動 $\triangle ABC$ ，都無法讓它和 $\triangle DEF$ 重疊，能讓它們重疊的唯一辦法是：將 $\triangle ABC$ 從平面上提起來，然後將它翻過來，再放回平面上（見圖二）。所以歐氏幾何是允許翻轉幾何圖形的，也就是將二維圖形與其鏡像看成是同一回事。若以同樣的精神看待圖一的左手與右手，則兩者應該被當成是同一回事，如此一來便左右不分了！

為什麼歐氏幾何要允許翻轉圖形？因為我們真實的空間是三維的，翻轉圖形是很容易想像的事，自然會把 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 看成是同一回事。只有當我們是不知有第三維空間存在的二維生物，無法藉由第三維度翻轉三角形，才得要區別兩者。從歐氏幾何左右不分的例子可學到一件事：如果空間是四維的，就能很容易藉由第四維空間將三維的左手翻轉成右手，則我們就會習慣不區隔左右了。在這種情況之下，三維的手徵是外在性質，單獨一隻手沒有特定不變的手徵，就如同我們以硬紙板剪出一個手的形狀，這個手形在三維空間中是說不出它是左手或右手的。



高涌泉是台灣大學物理系教授。