



## 奇妙的特殊相對論——時間延遲 (Time Dilation)

特殊相對論中高速運動物體的時間延遲，長度縮短，質量增加等重要概念，大部分人覺得很玄，但其實時間延遲是最基本也最簡單的觀念，學過畢氏定理及代數的國中同學應該都可以理解，請有興趣的同學跟著我一步步去了解。

這裡先提一個相對論的基本假設，那就是在任何一個等速運動的系統中，不論此系統跟光源的相對速度是多少，對於光速的測量結果一定一樣，這是愛因斯坦根據 19 世紀末一系列精確的（但令人困惑的）實驗結果所提出的基本假設。

現在讓我們接著假設有一輛火車在直線軌道上等速行駛，相對於月台的速度為  $v$ ，車廂的寬度為  $w$ ，光速為  $c$ 。假設車廂內的人做一個實驗，以光速測量車廂的寬度，光線來回一趟（利用反光鏡）花的時間為

$$t = 2w / c \quad (1-1)$$

然而在月台上靜止的人看來，光線其實走了一段 V 字形的路線，而此路線明顯的比  $2w$  長，但由於光速怎麼測量都不變，因此在月台上的人感受到的時間一定也會比較長（因為光走的距離較長，而速度等於距離除以時間），假設此時間為  $t'$  ( $t' > t$ )。V 字形路線由二個等長的斜邊（長度為  $r$ ）所組成，垂直的二股分別為  $(1/2) vt'$  及  $w$ ，因此由畢氏定理（見下圖）

$$r^2 = w^2 + [(1/2) vt']^2 \quad (1-2)$$

在月台上的人感覺經過的時間是：

$$t' = 2r / c \quad (1-3)$$

我們可將上式等號二邊平方並重新整理得：

$$r^2 = c^2 t'^2 / 4 \quad (1-4)$$

將 (1-2) 式與 (1-4) 式合併我們得到：

$$w^2 + [(1/2) vt]^2 = c^2 t'^2 / 4 \quad (1-5)$$

由 (1-1)  $w = ct/2$  並代入上式得 (等號二側同乘以 4)

$$c^2 t^2 + v^2 t'^2 = c^2 t'^2 \quad (1-6)$$

整理上式將  $t'$  項合併可得：

$$c^2 t^2 = (c^2 - v^2) t'^2 \quad (1-7)$$

等號二側同除以  $c^2$  得：

$$t^2 = (1 - v^2/c^2) t'^2 \quad (1-8)$$

二側開根號可得：

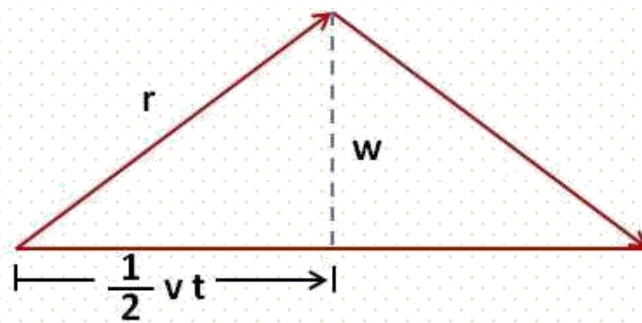
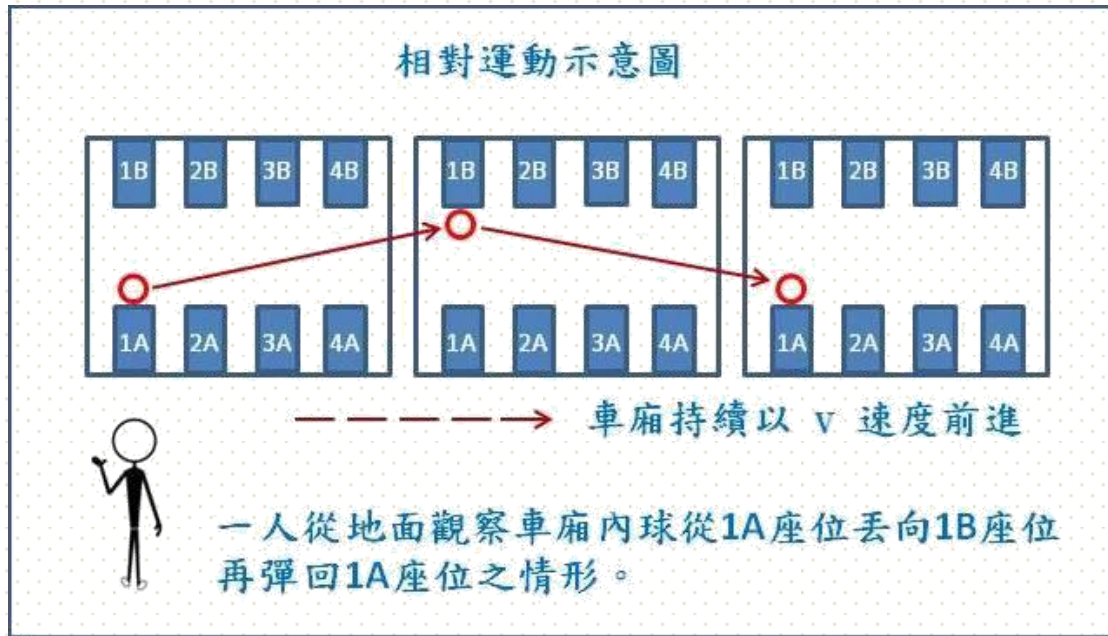
$$t = \sqrt{1 - (v/c)^2} t' \quad (1-9)$$

或可改寫成：

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} t \quad (1-10)$$

由於在同一個事件中月台上的人感受到的時間 ( $t'$ ) 比在火車上的人感受到的時間 ( $t$ ) 來得長 (請記得速度  $v$  一定小於光速  $c$ )，因此月台上的人覺得火車上的時間流動較慢 (經過的時間較短，或者說火車上的鐘看起來走得較慢)，且火車速度愈快 ( $v$  愈接近  $c$ ) 二者時間差別愈大，此稱為時間延遲效應或 time dilation。但相反的，火車上的人覺得自己其實是靜止的，是月台在移動，因此反而覺得月台上的人時間過得較慢。依照相對論原理，等速運動是相對的，並沒有所謂的絕對靜止，因此二者的看法都是正確的，你抓住相對論的精隨了嗎？

相對論所預測的時間延遲雖然違反直覺，但此現象已經通過無數次實驗上的驗證（比如說藉由人造衛星上的原子鐘與地表的原子鐘時間上的差距，GPS 的應用等），只是因為我們日常生活中所經歷到的相對速度遠小於光速（每秒 30 萬公里），所以不容易感受到相對論效應的影響。



$$r^2 = w^2 + \left(\frac{1}{2} v t\right)^2$$

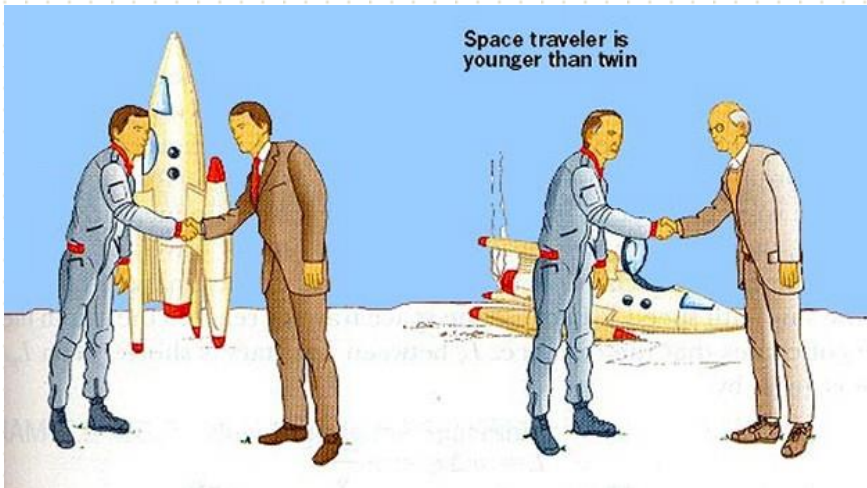
圖一. 從月台上看光的行進路線圖。

關於時間延遲最有名的討論是所謂的雙胞胎詭辯 (Twin Paradox)：如果有一對雙胞胎 30 歲時，哥哥以 99% 的光速到外太空旅行，而弟弟則留在地球上，如下

圖。哥哥以他自己的時間旅行五年後回到地球，發現弟弟已經 65 歲了。這是因為由 (1-10) 式：

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{t}{\sqrt{1-0.99^2}} = 7.1t \quad (1-11)$$

弟弟過的時間差不多是哥哥的 7 倍。但問題是弟弟也可以說因為運動是相對的，其實哥哥並沒有動，是他跟地球以 99% 的光速旅行去太空旅行，所以他現在應該比哥哥年輕。但實際上哥哥與弟弟不可能同時比對方年輕，這就是所謂“詭辯”的由來。各位同學你們覺得該如何解釋這個現象呢？到底誰年輕？



圖二. 雙胞胎詭辯

(圖案來源：<http://motls.blogspot.tw/2007/02/resolving-einsteins-twin-paradox.html>)

## 奇妙的特殊相對論——長度縮短 (Length Contraction)

上次談到特殊相對論中高速運動物體的時間延遲，這次來討論長度縮短的問題，其實長度縮短是時間延遲是必然結果，說明如下：

我們同樣假設有一輛火車在軌道上等速行駛，相對於月台的速度為  $v$ ，車廂的長度為  $L$ ，光速為  $c$ 。假設車廂內的人做一個實驗，以光速測量車廂的長度，光線從車廂後端出發到車廂前端花的時間為

$$t = L/c, \text{ 或 } L = ct \quad (2-1)$$

然而在月台上靜止的人看來，光線其實走了一節車廂長度 ( $L$ ) 加上這一段時間內 ( $t$ ) 車廂移動的距離：(注意：月台上的人可能觀察到不一樣的車廂長度與經過的時間)

$$L' + vt' = ct' \quad (2-2)$$

移項得：

$$L' = t'(c - v) \quad (2-3)$$

但由 (1-10)

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} t \quad (2-4)$$

將上式代入 (2-3) 可得

$$L' = \frac{c - v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} t \quad (2-5)$$

上式可改寫成：

$$L' = \frac{ct(1-v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (2-6)$$

利用乘法公式，上式也可寫成：

$$L' = \frac{ct(1-v/c)}{\sqrt{1-(v/c)}\sqrt{1+(v/c)}} \quad (2-7)$$

上式經過化簡並利用 (2-1) 可得

$$L' = \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}} L \quad (2-8)$$

等號右邊分子分母同乘  $\sqrt{1+(v/c)}$  得

$$L' = \sqrt{1-(v/c)^2} L \quad (2-9)$$

由 (2-9)， $v < c$  所以  $L' < L$ ，因此月台上的人看到的車廂長度較短。

這其實可以倒過來看，對於月台上的人而言，如果車廂長度不縮減的話，光速必須要變快才合理，但這又違反實驗結果相對論原理，所以在光速不變而時間延遲的前提下，長度縮短是必然的結果。但相反的，火車上的人覺得自己是靜止的，長度沒有改變，是月台在高速倒退，因此反而覺得月台上的世界長度縮短，然而依照相對論原理，二者的推論都是正確的。如果我們從地面看一個高速運動的火箭，我們會覺得它朝運動的方向縮短了，速度愈快，縮短的愈明顯，如下圖。

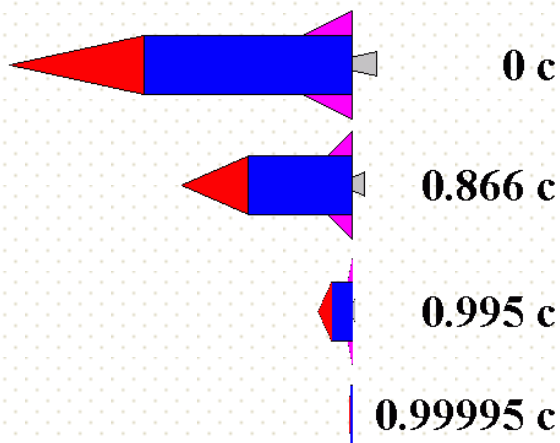


圖 2-1. 高速運動的火箭看起來朝運動的方向縮短。(圖案摘錄自：<https://www.boundless.com/physics/textbooks/boundless-physics-textbook/special-relativity-27/consequences-of-special-relativity-179/length-contraction-657-6319/>)

最近天文學家在已知離我們最近的恆星---半人馬座的 Proxima 周圍發現了一顆類似地球大小的行星， Proxima 距離地球 4.2 光年 (請參閱[這份報導](#))。如果太空船以 99% 的光速前往探測，從地球上來看至少要花上 4.2 年，但從太空船裡的人來看，太陽系急速遠離太空船，而 Proxima 急速向自己接近中，且 Proxima 的距離看起來只有 0.6 光年遠，太空船在 8 個月內就抵達了目標。(我們暫時先不考慮加速與減速的過程) 從地球上看，太空船上發生時間延遲所以太空人覺得 0.6 年就到了，然而太空人卻是覺得星際距縮短了 7 倍，所以只要 7 個多月就到達 Proxima。

## 奇妙的特殊相對論—質能互換 (mass-energy equivalence)

談過了時間延遲與長度縮短，今天來談狹義相對論中最著名的公式

$$E = m c^2 \quad (3-1)$$

首先我們要學一點最基本的物理：

- (1) 動量守恆
- (2) 能量守恆
- (3) 無外力作用時，質量中心的位置不會改變

一個質量為  $m$  速度為  $v$  的物體其動量為

$$p = m v \quad (3-2)$$

對於光子而言，若能量為  $E$ ，其動量為

$$p = E/c \quad (3-3)$$

我們想像一個長條形的盒子，或稱為 Einstein's box，長度為  $L$ ，質量為  $M$ ，一股總能量為  $E$  的光線從盒子左端放出往右端前進。

由動量守恆及 (3-3) 盒子應該同時獲得一個往左的動量  $E/c$

因此由 (3-2) 盒子往左移動的速度為

$$v = E/M c \quad (3-4)$$

光線從左端到達右端所需的時間為

$$t = L/c \quad (3-5)$$

因此盒子往左移動的距離為

$$d = t \times v = E L / (M c^2) \quad (3-6)$$

假設光線到達右端後被右端的物質完全吸收 (能量守恆)，並使得盒子停止運動。但由於這是一個封閉的系統，沒有外力作用，所以依照牛頓定律，系統的質量中心不該有任何移動，所以我們必須假設光線的能量在盒子右端轉變成質量  $m$ ，且盒子往左移動與右端生成的質量對質量中心位置的影響剛好抵銷掉。因此，質量中心不移動的條件為：

$$m L = M d \quad (3-7)$$

將 (3-6) 帶入 (3-7)

$$mL = M EL / (M c^2) \quad (3-8)$$

消去  $L$  與  $M$  可得

$$m = E / c^2 \quad (3-9)$$

或寫成

$$E = m c^2 \quad (3-10)$$

這就是著名的質能互換公式。為了易懂，以上推論的過程不是很嚴謹，但若用嚴格的方法去推導，所得到的結論是一樣的。質量是能量的一種呈現，由於光速很高，所以很小的質量變化會對應到巨大的能量改變，這也就是核融合及核分裂過程中，微小的質量損失可以造成大量熱量釋放的原因。



圖 3-1. 慶祝世界物理年 (2005)，台北 101 以燈光展現愛因斯坦著名的質能互換公式。

## 奇妙的特殊相對論—慣性質量增加(relativistic mass increase)

特殊相對論中最後一項基本概念是高速運動的物體慣性質量增加，也就是說當運動速度愈接近光速時，需要愈多的能量才能增加物體運動的速度，因而我們需要無限大的能量才能將物體加速到光速，也就是說任何有質量的物體運動的速度不可能達到或超過光速。(沒有質量的粒子只能以光速行進)

我們從狹義相對論的一個基本公式出發，物體的總能量可表示為

$$E^2 = (c p)^2 + (E_0)^2 \quad (4-1)$$

$c$  為光速， $p = m v$  為物體的動量 ( $m$ : 質量， $v$ : 速度)

$E_0$  可看成是物體靜止時的能量

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (4-2)$$

$m_0$  為物體靜止時的質量

(4-1) 式可先看成是相對論中符合實驗的基本定理，不另行推導。

由於質量是物體在任何運動狀態下總能量的一種衡量，所以在任何運動速度下總能量與質量的關係可寫成

$$E = m c^2 \quad (4-3)$$

所以動量乘以光速可改寫成

$$c p = c m v = E v / c \quad (4-4)$$

將 (4-4) 帶入 (4-1) 得到

$$E^2 = (E v / c)^2 + (E_0)^2 \quad (4-5)$$

化簡得

$$E^2 [1 - (v/c)^2] = (E_0)^2 \quad (4-6)$$

兩邊開根號整理得

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4-7)$$

兩邊同除  $c^2$ ，並由 (4-2) 與 (4-3) 式得

$$\frac{E}{c^2} = \frac{E_0/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4-8)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4-9)$$

由於  $\sqrt{1 - (v/c)^2}$  項小於 1，且當  $v$  很接近  $c$  時該項趨近於 0

所以運動中的物體質量增加，速度愈快，質量愈高，也愈難增加其運動速度，當速度達到光速時質量會變成無窮大，或者說我們需要無窮大的能量才能將物體加速到光速，因此相對論指出物體運動的速度不可能超過光速。

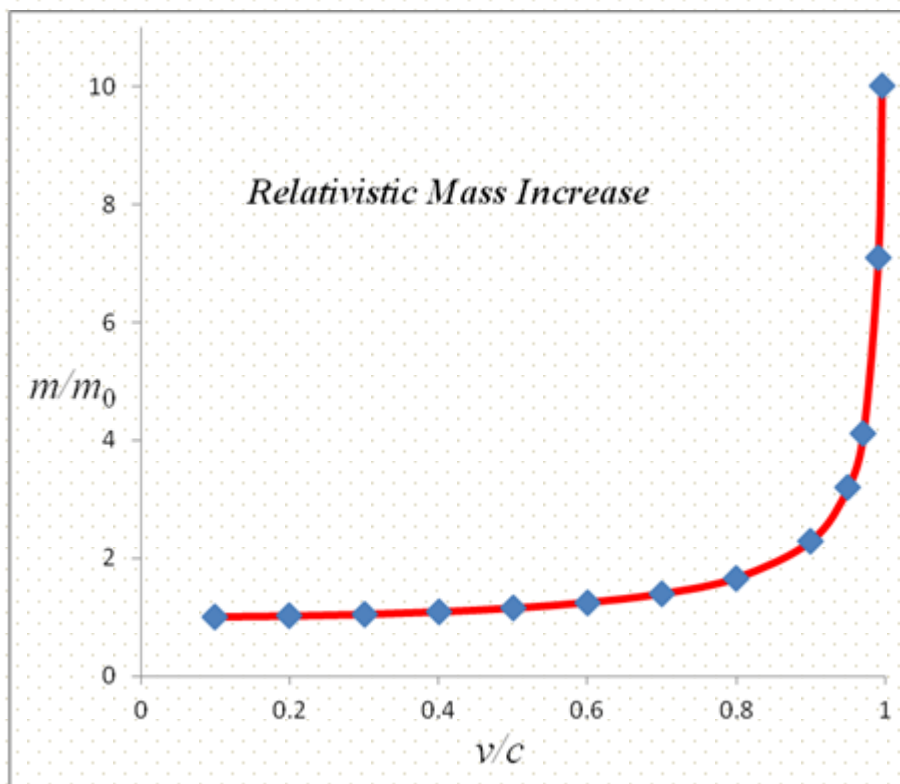


圖 4-1. 物體的質量隨著速度增快而增加。

式(4-9) 已經在高能量的電子或質子加速器中獲得廣泛的驗證，科學家雖然可藉著技術上的改進不斷提高加速器的能量，比如說目前歐洲 CERN 的 LHC 加速器已經可以將質子加速到 6.5 TeV (6.5 兆電子伏特)，但質子的速度只會愈來愈趨近光速，但永遠無法突破光速。

筆者在 FB 上寫完此篇文章的三天前剛好是愛因斯坦發表廣義相對論的 100 周年紀念，廣義相對論是將特殊相對論一般化，可以完整的處理加速度運動及重力場的效應。廣義相對論可以說是人類史上最偉大的科學成就之一(或許不需要"之一")，100 年來廣義相對論讓人類對宇宙中的各種現象有了更深入的了解，也通過了無數嚴格的科學驗證。在此我們向愛因斯坦及相對論致上最高的敬意。

Copyright © 2016 胡維平 All rights reserved.

國立中正大學化學暨生物化學系

2016/9/5 修訂