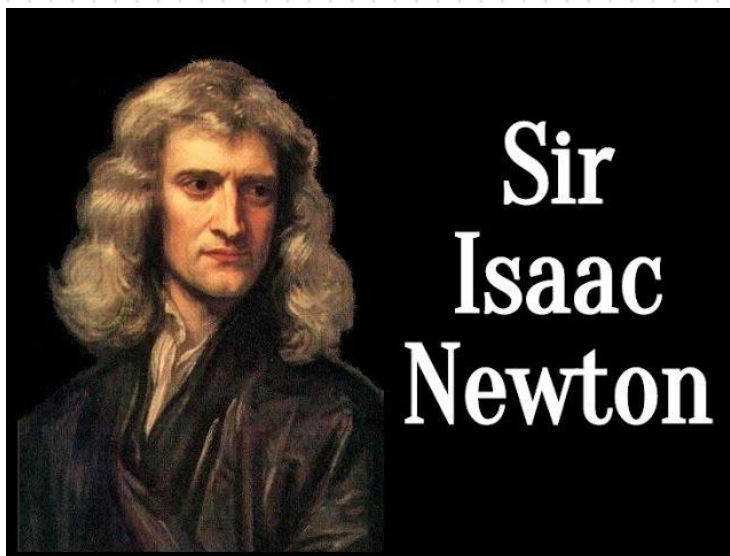


# 科技部科普活動計畫 站上巨人的肩膀

## 偉大科學家傳記讀本輔助講義

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆  
☆☆☆☆  
☆☆☆☆  
☆☆☆☆  
☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

### 牛頓



作者：李進榮

國立清華大學物理博士

國立中正大學物理系教授

# 牛頓

## 人物生平

牛頓 (Isaac Newton, 1643-1727)，英國偉大的數學家、物理學家、天文學家和自然哲學家，其研究領域包括了物理學、數學、天文學、神學和煉金術。牛頓的主要貢獻是發明了微積分，發現了萬有引力定律和古典力學，對陽光進行分解及合成，讓人們了解光顏色的本質，並且牛頓還製作了第一架沒有色差的反射式望遠鏡。放眼整個科學歷史，能與牛頓並提的對手，只有古希臘時期的阿基米德，以及近代的愛因斯坦。

依現代的說法，我們的主角有點宅，牛頓從未見大海(卻是第一個解釋大海潮汐現象的人)，一輩子不曾離開英國，而且只活動於出生地林肯郡、劍橋大學和首都倫敦，這三個地方共長一百五十公里的狹長區域。他似乎沒什麼玩樂，對藝術、音樂、文學毫無興趣，他沒有多少親近的家人及朋友，沒有異性情侶，這種孤僻反映出牛頓早年生活經歷。有些人設想，要是少了這一些孤傲，他也許就不可能有如此的發現和成就。

牛頓，一個遺腹子，於 1642 年聖誕節那天降臨人間。如果牛頓從來不覺得他的一生需要什麼人，可能是因為他從未見過父親，和母親也不親密。當牛頓三歲時，他的母親改嫁並住進新丈夫史密斯牧師的家，母親把牛頓託付給她的母親(牛頓的外祖母)撫養。年幼的牛頓不喜歡他的繼父，並因母親的改嫁，應該會有被遺棄的感覺。在 1662 年的日記中，牛頓寫道：「我威脅父母，要放火燒

了他們和房子。」但是牛頓和外祖母也不算親近，在牛頓留下的文字紀錄中，從未出現溫馨回憶外祖母的隻字片語。不過，至少沒有想要放火燒外祖母的家。

少年時的牛頓並不是神童，他成績一般般，但他喜歡讀書，喜歡看一些介紹各種簡單機械模型製作方法的資料，並且自己會動手做些小玩意。他製造一架小型磨坊，並且利用老鼠來運轉它，他製造精心設計的風箏，在繩子上掛著燈籠，夜間村人看去驚疑是彗星出現；他還製造了一個小水鐘，每天早晨，小水鐘會自動滴水到他臉上，催他起床。他尤其喜歡刻日晷，家裡牆角、窗台上到處安放著刻劃的日晷，用以追蹤日影的移動。

牛頓 10 歲的時候，繼父去世了，母親帶著三個孩子(弟弟及兩個妹妹)回到林肯郡。牛頓必須扮演哥哥的角色，幫忙照顧異父弟妹，但這種日子並不長，不到兩年，牛頓就被送去格蘭漢姆的文法學校去唸書了。在 17 世紀的文法學校的教育中，有一個重要的特色就是教授聖經。我們知道牛頓學習過聖經，用的是古典的希臘文，他因此培養出一輩子對神學問題的興趣。另一個課程是學拉丁文，這是當時科學與數學的通用語文，牛頓精通拉丁文，這讓牛頓有了自學的能力。因為他的學習成績乏善可陳，他母親認為牛頓乾脆回家來管理農場和家產。只是牛頓對於管理農場既不喜歡也不在行。他的舅舅是劍橋大學畢業的牧師，覺得與其讓志不在此的牛頓留在家中，還不如讓他回到學校完成學業，便成功地說服了牛頓的母親。

再次回到學校，這一次牛頓的學業有了大躍進，部分原因是打贏了名叫史多樂的校園惡霸，這讓牛頓有了自信，年輕的牛頓似乎開竅了，既然在體力上可

以贏人，功課上當然也不會輸人。這個故事是有真實性的，因為牛頓的日記中，列舉的罪狀就有一條：「痛扁史多樂。」他扭轉了學校功課上的不良紀錄。此時的牛頓展示了自己過人才智和好奇心，現在的牛頓打算要到大學深造，他要去他舅舅的母校劍橋大學唸書。

1661 年 6 月，牛頓進入了劍橋大學的三一學院，沒想到後來的整整三十五年，劍橋成了牛頓的家園。在當時，三一學院的教學，是以亞里士多德的學說為本，亞里士多德認為天上的日、月、星辰的運行軌道是圓形的，因為只有圓運動才是完美的、和諧的，而地上的運動，例如重物直線落下是凡俗的，天上與地下遵循不同的法則。但牛頓更喜歡閱讀有關笛卡兒的哲學，以及伽利略、哥白尼和克卜勒等天文學家更先進的思想，牛頓在他的筆記本上寫了一句口號：「與柏拉圖為友，與亞里士多德為友，更要與真理為友。」在這句口號下面，他列舉了一連串的問題，這些問題涵蓋了自然科學的領域，以及他最感興趣的神學。例如：他問說物質的分解是連續的、無限的？還是不連續的、分散的呢？他也問空間是有限的，還是無限的呢？有一些問題，例如有關流動性、穩定性、濕度，牛頓僅僅停留在列出題目這一步，但是在有關溫度、磁力、顏色等領域，已有不少的研究成果，牛頓雄心勃勃地把了解整個自然界的現象都列進了他的研究計劃。在三一學院的最後兩年的學生生涯，影響牛頓最深的人是巴羅(Isaac Barrow)，他是學院的教師，也是劍橋大學裡第一位賞識牛頓才華的數學家。巴羅是首任的盧卡斯講座教授，當他 1669 年辭去教席，轉為神職時，他推薦當時僅 27 歲的牛頓作為繼任者。這一個有很高榮譽的盧卡斯講座，一直延續到今日，



20 世紀的知名物理學家，狄拉克( P. A. M. Dirac)以及霍金( S. Hawking)都曾經擔任過盧卡斯講座教授。

1665 年 6 月，也是牛頓即將畢業時，倫敦發生了腺鼠疫，腺鼠疫又稱黑死病，是由老鼠引起的一種傳染病，傳染力及死亡率非常高，僅僅一個月內，倫敦就死亡了 7 萬人。距離倫敦 80 公里的劍橋大學被迫關閉，學生和教師都放假回家。這樣，牛頓回到自己的家鄉林肯郡，在家鄉住了 18 個月，這期間，牛頓的天才大爆發，在科學思想史上，只有愛因斯坦的奇蹟年(1905 年)可堪比擬。但是要一直過了很多年以後，整個世界才知道，牛頓在那 18 個月期間做了些什麼，這個神奇年份(annus mirabilis)，牛頓在科學上做出了三大發現：微積分、光的色散和萬有引力定律。他自己說：「這一切發生在 1665 至 1666 年瘟疫期間，那時候是我創造力的黃金時期，後來，我再也沒有像當時那樣專注於數學和哲學了。」

接下來的 25 年，牛頓以異於常人的精力專注於研究，這麼長時間的全神貫注，在人類歷史上幾乎絕無僅有。牛頓成功的秘訣，「我並無特別過人的智慧，有的只是堅持不懈的思索精力而已。」牛頓除了研究數學、物理、天文之外，還研究和撰寫有關秘教、神學、煉金術(點石成金的哲人石，長生不老藥…)，他寫了約百萬言的手稿，如經濟學家凱恩斯(John M. Keynes)說的：「除了作為輔助我們理解這位偉大的天才的心靈，那種迷人的側光之外，它們沒有多少實質性的價值。」

牛頓 50 歲時，害了嚴重的精神崩潰(憂鬱症、失眠、被害幻想症)，大約用

了兩年的時間才康復，他的病情可能有部分是汞中毒造成的，因為煉金術最常使用這種材料。他說他思維失去了以前那樣的首尾一貫，從此不再能像以前一樣長時間集中精神來思考工作。但是在 1697 年，當瑞士數學家伯努利公開徵求最速降落曲線的解答，這問題是變分法的起源，前半年內全歐洲數學家無人能解答。有一天牛頓偶然聽說此事，當天晚上一舉解出，並匿名刊登在《哲學學報》上。伯努利讚嘆說：「從這鋒利的爪中，我認出了雄獅。」雖然精神已不如從前，卻仍是英國最強有力的心靈，有如神話人物的牛頓。

1694 年，牛頓離開劍橋到倫敦皇家鑄幣局任職，這是關心他的朋友為他安排的肥缺。此職位一般都是閒職，但牛頓卻非常認真的對待。牛頓估計在市場上流通的錢幣，大約有 20% 的硬幣是偽造的，但是要對那些破壞金融的罪犯者定罪是非常困難，不過事實證明牛頓做得很好，他親自送了 10 多個犯人上絞刑台。接下來 25 年的公職生涯，證明他是一個非常有效率的公務員，牛頓在 1717 年創立金融法案，把英鎊錢幣從銀本位轉成金本位，這在當時是重大的改革，相當程度的增加英國的財富和穩定。1705 年，安妮女王授予牛頓爵士身份 (Sir Isaac Newton)，牛頓是第二個被授勳的英國科學家，第一個是法蘭西斯·培根。至此，他瘋狂追求真理的時代已經一去不復返了。

## 主要成就：光學、力學和微積分

### 一.光學成就

為了探究光的本質，這位熱愛實驗的科學家牛頓居然用針狀的錐子戳壓自己的眼窩，直到他看見了「幾個或白或暗或彩色的圓圈，戳得越用力，那些圓圈就越清晰」。甘冒著失明的危險，僅得到視覺是壓力的表現之結論，真令人費解。不過有關顏色的分析，正如牛頓所說的：「如果它不是迄今對大自然的運作所做出的最重要的發現，也是最奇妙的發現。」在牛頓的研究之前，人們認為白色太陽光，通過稜鏡會產生彩虹，是因為白色光退化所致，根據白光在稜鏡中路徑的長短，白色光的退化程度有差別，所以排列出多種顏色的譜帶。而牛頓則正確地指出，白色陽光是由許多單一顏色的光混合而成，不同顏色的光有不同的折射率(折射能力)，在可見光中，紅色光的折射率最小，而紫色光最大，所以造成譜帶(彩虹)。牛頓這一重要發現是光譜分析基礎，揭示光顏色的秘密。他的結論是經由一系列的實驗結果，綜合推理得到的：

1. 在實驗中被稜鏡分解的光(彩虹)，經過適當調整過的第二個稜鏡後，會重新組合為原來的白光。第二個稜鏡可以逆轉光分解及合成的過程，說明了稜鏡並不是讓白光退化，因為退化是不可逆過程。
2. 他還擷取光譜(彩虹)的某一單色光(譬如說紅光)，並將其照射到稜鏡，發現紅光依舊是紅光。不會改變，所以單色光是單純的，而白光是混合的。

3. 光譜的形成是因為白光包含了各式各樣的單色光，若遮掉部分顏色的光，那麼經過第二個稜鏡之後出射的光，就不會是白色的，譬如攔下藍色的光，最後只會組成綠光，不再是白光了。

總之，如 Frank Wilczek 所說的，牛頓是在研究光的「化學」，因為分析或純化，正是化學的第一步。

從顏色分析工作中，他得到如下結論，任何折射式望遠鏡，都受到光色散成不同顏色的影響，不是所有顏色的光都能同時聚焦，所以會得到模糊的影像。這就是色差的問題。牛頓使用凹面反射鏡來收集光線，而不是使用透鏡，他的反射式望遠鏡可消除色差，現代多數大型望遠鏡都是反射式的。1671 年，他在皇家學會展示了自己的反射式望遠鏡，讓皇家學會對這新型望遠鏡產生濃厚的興趣，並鼓勵牛頓發表他的光學筆記。但當虎克公開批評了牛頓的光微粒觀點之後，牛頓對此很不滿，最後還退出了辯論會。兩人自此以後成為敵人，這種敵對關係一直持續到 1703 年虎克去世，牛頓才同意出版他的《光學》一書。在爭論過程中，牛頓曾寫了封信給虎克，其中有這麼一句膾炙人口的名言：「如果我看得比別人更遠，那是因為我站在巨人的肩頭。」一般認為這是牛頓謙虛而理智的說法，也承認了前輩哥白尼，伽利略和克卜勒的科學發現。但霍金就認為這句話是對虎克的一種委婉的羞辱，因為虎克身材矮小，還有點駝背，實在與巨人的形象相去甚遠。在虎克去逝後，牛頓接任皇家學會會長，他下令將虎克的肖像全部去除，至今我們沒有虎克的畫像。

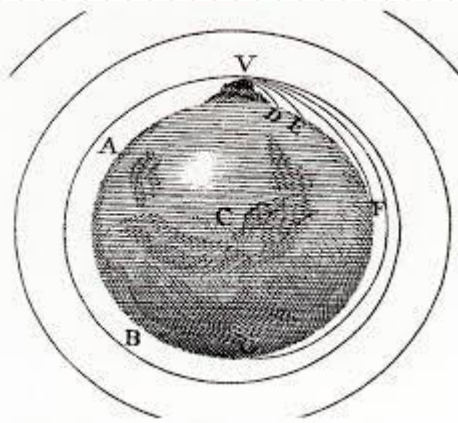


至於虎克和牛頓的爭論點，主要是有關光是甚麼？到底光線是由微小光粒子射線所組成的，還是光線是光波所組成。如今我們知道牛頓的光粒子理論的內容是不完整的。但這問題一直要到 20 世紀有了「波與粒子」二象性的認知，就是說波同時有粒子行為，粒子也是會表現波現象的，粒子說和波動說對光的本質提供互補的觀點，這才得到完美的解決。

## 二.力學成就

有關於牛頓的一則著名故事，指出牛頓看到蘋果從樹下掉下來，啟發了他的萬有引力定律。漫畫作品更進一步說，掉落的蘋果正好砸中牛頓的頭，敲出了靈感的火花。這個故事的內容是牛頓晚年對他的傳記作家所敘述的。但是，在他自己所寫的科學筆記中並沒有蘋果，只有下面這段話：「我開始思考將引力延伸到月球軌道上，從克卜勒行星運動週期定律，我推算出使行星在軌道上運動的吸引力(重力)，與其環繞中心的距離平方有關，比較月球受到的力與地表的引力，發現答案相當接近。」月球距地心為蘋果的 60 倍遠，而月球在軌道上彎向地心的距離，只有蘋果的 3600 分之一，是平方反比的關係。從此，他將這套理論用在所有的物體上，包括天上的行星及地上各種物質。

或許牛頓真的是從蘋果落地想到萬有引力的，在牛頓的《原理》一書裡，有一張圖，Wilczek 認為是「所有科學文獻中最美麗的一張圖」。



圖一、Wilczek 認為的所有科學文獻中最美麗的一張圖。

論藝術性，這圖一般般而已，美在它表現出物體(石頭)落地與天體運行的道理是相通的。當我們從高山水平地拋射石頭，若開始時的速率很小，石頭飛不遠就掉地了，隨著速率的增大，石頭在掉落地表前移動的距離就越長，想像在沒有空氣阻力下，速率快到一個數值之後，石頭便不會掉下來了，這也是現今人造衛星和太空船，繞行地球軌道的運動方式。圖示明顯表達出，直接墜落(速率為零)及繞行地球(夠大的速率)，都是受到地心引力的結果。

牛頓是萬有引力定律的發現者，他在 1665-1666 間開始考慮這個問題。然而天空中的祕密被牛頓保留了將近 20 年，於 1684 年，當牛頓向他的好友哈雷 (Edmond Halley) 陳述有平方反比的引力定律，並且引力會導致行星以橢圓方式來繞著太陽時，哈雷大為驚訝。然後牛頓告訴哈雷，他在多年前就已解決這問題了，但是不知把證明的筆記放在哪裡？在哈雷的懇求之下，牛頓用了三個月寫了一篇九頁的論文，向世界揭露他所發現的萬有引力的祕密。哈雷意識到這篇短文儼然已是一個架構完整的動力學的數學雛型，不管是在地球上或是天上各個星球之間，都必須遵守的物理定律，哈雷費了很多唇舌說服牛頓，願意將

完整的內容整理出書。隨後，長達 18 個月之久，牛頓專注於寫書，以致常常忘記吃飯，牛頓將以往 20 年裡所有的創作成果綜合起來，寫滿整整三大卷。牛頓把這部著作定題為《自然哲學之數學原理》(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)，這本書由倫敦皇家學會出版，但學會推說沒有經費，哈雷便自掏腰包，支付所有印刷及行銷的費用。

《原理》終於在 1687 年出版，我們現在認定 1687 年就是「古典力學」開始的一年。全書分三卷，第一卷敘述物體在無摩擦、無阻力下的動力學，現今教科書中的牛頓三大運動定律，就在此卷第一次出現。第二卷討論較實際的問題，如流體運動，考慮阻力、摩擦力的影響。第三卷的標題是「宇宙體系」，牛頓運用第一卷中的運動定律加上萬有引力定律，導出了克卜勒的三大行星運動定律，不僅如此用他的萬有引力定律，牛頓也解釋了月球、彗星、春秋分點的移動及海洋的潮汐現象。牛頓只用了一組定律，就把地球上所有運動與天空中星球的運動聯繫起來。「對於相同的自然現象，必須盡可能地尋求相同的原因。」把天體和地球運動規則統一。在以往亞里斯多德學者眼光看來，天體和地球是兩個世界，服從不同的自然規律，牛頓的研究成果改變了人類對宇宙的看法，誠如詩人波普(Alexander Pope)的讚頌：「自然與自然規律為黑暗隱蔽，上帝說，讓牛頓來！一切遂臻光明。」

### 三.數學成就

在 17 世紀，人們發現可以用代數方法來研究幾何學，即所謂的解析幾何學，數學研究就在整個歐洲開展。而其中最重要的是微分學與積分學，微分學可用來處理如速率、生長率、切線等問題，而積分學則討論如面積、體積、曲線長度等問題。

牛頓力學的特色是研究變動，在牛頓之前，囿於數學工具不足，人們無法討論變動的法則，像克卜勒有關行星的三大定律：

1. 行星的軌道是橢圓形，太陽位於焦點。
2. 行星與太陽的連線，在一定時間會掃過一定面積。
3. 繞太陽週期的平方，與橢圓長軸的立方成正比。

這三條定律都是描寫各物理量之間的關係，並不涉及變動法則。直到牛頓，他引入運動定律： $F=ma$ ，施以  $F$  大小的力，使得質量大小為  $m$  的物體，會以  $a$  大小的加速度運動。這是第一個使用微積分的方程式，只要知道現在的狀態，就能確定未來的行為。從此以後，日蝕、月蝕可以事先預知，這都歸功於微積分的發明。

現今，大家公認牛頓和萊布尼茲，兩人各自獨立發展出了微積分，並且各自創造了各自獨特的符號。但是根據牛頓周圍的人所述，牛頓要比萊布尼茲早好幾年得出他的結果，但因為牛頓一直到 1704 年才對外公布他的研究內容。而萊布尼茲已在 1684 年發表了他的完整論文，而且他的微積分符號，被歐洲大陸全



面採用，這兩陣營爆發了熱烈的爭執，即著名的微積分優先權之爭。1699 年初，皇家學會的成員指控萊布尼茲剽竊了牛頓的微積分成果，兩位當事人在 1711 年公開地加入這場衝突，萊布尼茲向皇家學會寫了答辯書：「我也不相信目前所給出的裁決，會被認定為皇家學會最後的判決，但牛頓先生卻已利用書籍出版的方式，並用學會的名義將它們傳送到德國、法國及義大利，因而損害我應有的貢獻聲譽。對我而言，我對牛頓先生始終懷抱莫大地尊敬。我先前已提過，他獨立地發現類似我的方法...。」最終英國皇家學會宣布牛頓是微積分真正的發現者，斥責萊布尼茲剽竊。但後來人們發現該調查評論萊布尼茲的結語是牛頓本人書寫，這糾紛一直持續到 1716 年，萊布尼茲去世才告結束。

### 最後的煉金術士

牛頓是相信上帝的，傾向一神論，不信當時英國教會主流的三位一體的教義，諷刺的是，他是劍橋大學三一學院的院士。牛頓相信神創造這世界之後，就讓自然規律去統治這個世界，世界只需要一個起點，也就他所謂的第一推動，那是由上帝指定的起始點，然後就會透過牛頓運動方程式，接著就會確立了世界的運轉，他曾說：「優雅的太陽、行星和彗星系統，不可能沒有造物者的安排，而能憑空出現。」牛頓除了物理學之外，還花一樣多的時間來研究神學和煉金術，其實對牛頓而言，各類研究的目標是一致的，都是為了探究世界的真相和上帝的旨意。由於牛頓天賦過人，以數字方法來分析聖經，是很順理成章的事，他算出創世紀、諾亞方舟，以及其他聖經事件的確切日期，甚至預言 2060 年是



世界末日。牛頓的另一個興趣是煉金術，我們要考慮他所處的時代背景，在17世紀，煉金術和化學是不分的，就像研究其他的學科一樣，牛頓在探索煉金術時，也是採用一絲不苟的態度的，不過，由於他的推理是以我們完全不熟悉的邏輯為基礎，我們很難瞭解他得出來的成果。牛頓至今留下約三十萬字有關神學、秘術、煉金術的手稿，這一大堆資料現存放在耶路撒冷的希伯萊博物館，既不對外發表，也沒有人去整理。著名經濟學家凱因斯認為：「他是最後一個偉大的思想家，他不是理性時代的第一人，而是最後一個煉金術士。」

1727年3月，偉大的牛頓逝世，他是史上第一個獲得國葬的自然科学學家，與很多傑出的英國人一樣，埋葬在西敏寺教堂，墓碑上銘刻著：「...他憑著近乎神聖的智識以及獨樹一格的數理原理，探索行星的運行、彗星的軌道、海洋的潮汐，以自己的理念證明萬能上帝的至善，並以他的方式展現真理的簡潔。凡人慶幸世間竟然存在如此偉大的人物。...」牛頓的一生，有著很多瑣碎的爭執，與同時代的偉大人物互相漫罵，一生壓抑、晦暗，缺少父母、愛人和朋友的關心。他總是把自己封閉起來，不願顯露自己的心思，如愛因斯坦說的：「他站在我們的面前，那麼高大，那麼堅定，那樣孤獨。」但是他在臨近生命終點時，對自己的成就評價，竟是謙遜得令人難以理解，他形容自己：「不知道在世人眼中，我是何等人物，自覺只是一個偶遊海濱的頑童，到處尋找一塊更光滑的鵝卵石或者一個更漂亮的貝殼而已，真理如同汪洋大海，展現在面前，至今我還一無所知。」事實上，牛頓的鵝卵石和貝殼，已幻化成今日巍峨的古典力學殿堂，徹底改變了人類對世界的看法，人們也因為站在牛頓的肩頭，看清楚了自

己在宇宙中的地位。

## 參考資料

寫作過程，參考引用了很多文獻資料，原作(譯)者當可會心。因為本文僅僅是介紹性的文章，這裡就不一一列舉誌謝了。

- (1). 牛頓，James Gleick 原作，譯者：吳錚，五南圖書出版公司。
  - (2). 牛頓，Gale E. Christianson 原作，譯者：陳明璐、李麟，世潮出版有限公司。
  - (3). 站在巨人肩上，Stephen Hawking 原作，譯者：張卜生等，大塊出版公司。
  - (4). 站在巨人肩上，Richard Brennan 原作，譯者：張啓陽，年輪文化出版。
  - (5). 萬物皆數，Frank Wilczek 原作，譯者：周念縈，貓頭鷹出版。
  - (6). 科學大歷史，Leonard Mlodinow 原作，譯者：洪慧芳，漫遊者出版。
  - (7). 古代天文學中的幾何方法，作者：張海潮、沈貽婷，三民書局出版。
  - (8). Let Newton Be !，John Fauvel，Ramond Flood，Michael Shortland and Robin Wilson 原作，Oxford University Press.
  - (9). Newton`s Principia，S. Chandrasekhar 原作，Oxford University Press.
- 網路上可找到一些文章，很值得參考(利用 google)，列舉 2 篇：
- (1). 牛頓，作者：許仲平。
  - (2). Newton, the Man，作者:John M. Keynes.

## 延伸閱讀

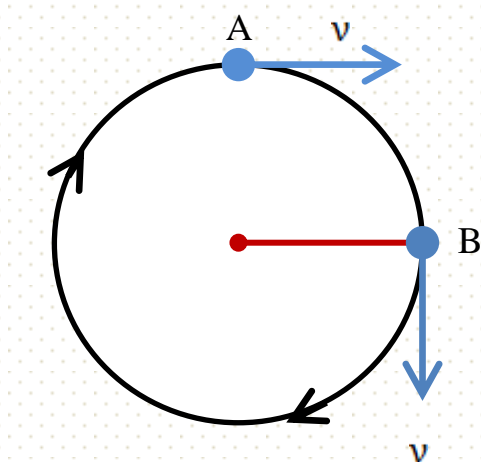
### 一.等速率圓周運動

對亞里士多德來說，圓周運動是最自然、最完美的，天上的星辰就是以等速率，沿著圓周運轉於天球，當然，天球的球心，就是我們所居住的地球。速率指的就是多少時間，跑多長距離的比值，一小段時間，可以跑一大段距離，我們就稱作高速率。而速度則是除了速率大小的數值外，還要加上運動的方向。同樣地，加速度就是速度的變化率，多少時間，改變多少速度的比值。所以說，不論是速率數值大小有變，或者僅僅是方向上的轉彎，都算是改變了速度，也就有了加速度。

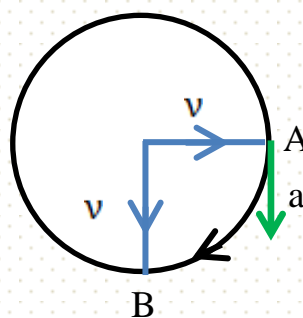
我們來計算以等速率 $v$ ，環繞半徑 $r$ 圓周之物體的加速度大小。因為等速率，加上很對稱的圓周運動，結果，圓上每一點，每一個時刻，看起來都是一樣的，只要作 360 度旋轉，便是整個的運動。

(圖一)表明粒子沿著圓周，以等速率 $v$ 繞圈走，而圓的半徑長度是 $r$ ，所以速度 $v$ 是圓的切線。(圖二)是將各點的速度收集起來，那會構成一個半徑長度為 $v$ 的圓，而其切線正是加速度。從(圖一)，粒子在 A 點的速度方向是水平的，跑到 B 點時，變成垂直方向，從 A 點到 B 點，速度方向一直連續改變，就是說每一點都有速度上的變化，每一點都有加速度，我們稱之為向心加速度。因為

速度改變的方向(見圖二)，和速度方向垂直，從而加速度方向是朝著圓心。舉例來說，若 A 點沒有加速度，那粒子將沿水平方向飛走，不會彎向 B 點，改變行進方向而「彎下來」，就是因為有了向心加速度的緣故。



圖一



圖二

由(圖一)和(圖二)可以知道，在(圖一)從 A 點到 B 點走一圈回到 A 點，速度的改變就是如(圖二)所示，從 A 沿著 B 一直走回 A 點，所以總共改變了  $2\pi v$ 。

現在來計算向心加速度的大小如下(以  $a$  來表示)， $a = \frac{2\pi v}{T}$ ，因為走一圈的時間(一個週期，記為  $T$ )，速度改變量是  $2\pi v$ 。週期時間  $T$  就是(圖一)中，繞圓周一圈

的時間  $T = \frac{2\pi r}{v}$ ，因此得出  $a = \frac{v^2}{r}$ ，速率愈小，向心加速度愈小，而圓的半徑愈

小，則向心加速度愈大，也就是想要作大轉彎，就要有比較大的加速度才能辦

到。再從牛頓的力與加速度的關係  $F = ma$ ，我們稱，造成向心加速度的力為向



心力。牛頓發現月球繞著地球作圓周運動，所需的向心力正是月球和地球間的萬有引力。

## 二.蘋果和月亮

### 平方反比定律

克卜勒有關行星繞太陽運行的三大定律：

- 1.行星的軌道是橢圓形，太陽位於焦點。
- 2.行星與太陽的連線，在一定時間會掃過一定面積。
- 3.繞太陽週期的平方，與橢圓長軸的立方成正比。

牛頓把這適用於橢圓形軌道之定律，套用到月球繞地球的情況，因為橢圓畢竟是壓扁的圓而已，圓算是沒被壓到的橢圓。所以，只要把行星當成月亮，太陽換作地球，這麼一來，月球會以等速率( $v$ )，沿著圓周環繞地球，地球則在圓心位子不動，月亮繞地球一周的時間為  $T$ ，和圓的半徑  $r$  (月球到地心的距離) 之關係是： $T^2 = cr^3$  (克卜勒第三行星運動定律)，週期的平方和半徑的立方成正比， $c$  是比率常數，常數大小和地球的質量有關。以數學式子表達，週期  $T = \frac{2\pi r}{v}$ ，以速率  $v$  走一圓周長  $2\pi r$ ，所需的時間是大小  $T$ 。如此一來，我們有  $T^2 = \left(\frac{2\pi r}{v}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{r^2}{v^2}$ ，又  $T^2 = cr^3$  得到向心加速度  $a$ ， $a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{c} \frac{1}{r^2}$ ，向心加速度大小和距離平方成反比，也就是說向心力的大小和距離平方成反比，依牛頓

的想法，這向心力就是萬有引力，所以牛頓說，萬有引力的大小和距離的平方成反比。

牛頓還做了數值上的驗證：由  $a = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ ，月球繞行地球一圈

是 27.6 天，月球到地心的距離是  $3.84 \times 10^5$  公里，代入上式得  $a = 0.00267 \frac{\text{公尺}}{(\text{秒})^2}$ ，而

地球的半徑是 6371 公里，蘋果受到的重力加速度( $g$ )大小是  $g = 9.8 \frac{\text{公尺}}{(\text{秒})^2}$ ，比較

距離  $\frac{6371 \text{ 公里}}{3.84 \times 10^5 \text{ 公里}} = \frac{1}{60}$ ，而得  $\frac{a}{g} = \frac{0.00267}{9.8} = 0.000272 = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2$ 。果然，「推

算出使行星在軌道上運動的吸引力(重力)，與其環繞中心的距離平方有關，比較月球受到的力與地表的引力，發現答案相當接近。」月球距地心為蘋果的 60 倍遠，而月球在軌道上彎向地心的加速度，只有蘋果的 3600 分之一，符合平方反比的關係。

## 爭端不止

1684 年，英國皇家學會的三個會員，天文學家哈雷，建築家雷恩，以及會長虎克，有過一場熱烈的討論，議題是：行星與太陽之間的平方反比引力，是如何造成行星的橢圓形軌道？當時人們認為平方反比定律的原因，是因為太陽影響力傳播的結果，就像光源一樣，離光源愈遠，光亮度將會愈小，與距離平方成反比地減少。重點是如何證明，這引力決定了行星的橢圓軌道。虎克宣稱他能證明這命題，但是他要暫時保密，想讓大家先去試解，好知道那有多難，「大

家就會知道如何評價它了。」雷恩還提供了獎賞，要給得出解答的人。7個月過去了，沒有一點動靜，連虎克都沒有一點表示，所以哈雷去找了牛頓，這促成了《原理》的誕生。當《原理》第三卷剛開始寫作時，虎克竟然控告牛頓剽竊他的平方反比定律的想法，一度讓牛頓不想把結果發表出來，幸虧有了哈雷的努力說服。哈雷寫信告訴牛頓，虎克此舉只是想分享一些榮譽而已，只要在《原理》的序言中感謝他即可，但十分憤怒的牛頓，反而仔細重寫他的手稿，把原手稿中所有提及虎克的地方全部刪除，兩人的恩怨從此再無化解的可能了。

Copyright © 2016 李進榮、胡維平 All rights reserved.

國立中正大學物理系、化學暨生物化學系 2018/7/12 修訂